Ejercicio propuesto: Sea la acción,

$$S[x(t)] = -mc \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} \tag{1}$$

A) Demostrar que la transformación,

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x), \\ x' &= \gamma(-\beta ct + x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \beta &= \frac{v}{c} \end{aligned}$$

deja invariante la acción.

B) Encontrar las transformaciones infinitesimales.

Dem A).
Consideremos por simplicidad $c = 1$, entonces podemos escribir la transformacion como,

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \beta x), \\ x' &= \gamma(-\beta t + x), \end{aligned}$$

o bien en forma matricial como,

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

de modo que podemos escribir las variables t, x en terminos de las variables primadas, es decir,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos escribir,

$$\begin{gathered} t = \gamma t' + \gamma\beta x', \\ x = \gamma\beta t' + \gamma x', \end{gathered}$$

Diferenciando ambas expresiones,

$$dt = \gamma dt^{'} + \gamma\beta dx^{'},$$
$$dx = \gamma\beta dt^{'} + \gamma dx^{'},$$

Por otro lado, podemos rescribir la acción como,

$$\begin{aligned} S[x(t)] &= -m\int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1-\dot{x}^2}, \\ &= -m\int \sqrt{(dt)^2}\sqrt{1-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}, \\ &= -m\int \sqrt{(dt)^2\left[1-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]}, \\ &= -m\int \sqrt{dt^2 - dx^2}, \end{aligned}$$

Podemos sustituir las expresiones encontradas para dt y dx, obteniendo,

$$\begin{aligned} S[x(t)] &= -m\int \sqrt{dt^2 - dx^2}, \\ &= -m\int \sqrt{(\gamma dt' + \gamma\beta dx')^2 - (\gamma\beta dt' + \gamma dx')^2}, \\ &= -m\int \sqrt{\gamma^2 dt'^2 + \gamma^2\beta^2 dx'^2 + 2\gamma^2\beta dx' dt' - \gamma^2\beta^2 dt'^2 - \gamma^2 dx'^2 - 2\gamma^2\beta dx' dt'}, \\ &= -m\int \sqrt{(1-\beta^2)\gamma^2 dt'^2 - (1-\beta^2)\gamma^2 dx'^2}, \\ &= -m\int \sqrt{(1-\beta^2)\left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]^2 dt'^2 - (1-\beta^2)\left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]^2 dx'^2}, \\ &= -m\int \sqrt{dt'^2 - dx'^2}, \end{aligned}$$

Por lo que podemos escribir la acción como,

$$S[x^{'}(t^{'})] - m\int_{t_1^{'}}^{t_2^{'}} dt^{'}\sqrt{1-\left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2}, \tag{2}$$

Por lo tanto, estas transformaciones dejan invariante la acción.

B) Para obtener las transformaciones infinitesimales, podemos usar una expansión de Taylor a primer orden de β, ya que las transformaciones solo dependen de ella,recordando que,

$$f(x+\delta x) \approx f(x) + \frac{df}{dx}\delta x$$

de modo que para obtener $\delta t^{'}$ necesitamos

$$\begin{aligned} t^{'}(\beta) &= t^{'}(0) + \left.\frac{dt^{'}}{d\beta}\right|_{\beta=0}\beta, \\ &= t^{'}(0) + \left.\frac{d}{d\beta}(\gamma t - \gamma\beta x)\right|_{\beta=0}\beta, \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{d\beta}(\gamma t - \gamma\beta x)\right|_{\beta=0} &= \left.\frac{d\gamma}{d\beta}t - \frac{d\gamma}{d\beta}\beta x - \gamma x\right|_{\beta=0}, \\ &= \left.\beta(1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}}t - \beta(1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}}\beta x - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}x\right|_{\beta=0}, \\ &= -x \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\delta t^{'} = -\beta x,$$

para obtener $\delta x^{'}$ tenemos,

$$\begin{aligned} x^{'}(\beta) &= x^{'}(0) + \left.\frac{dx^{'}}{d\beta}\right|_{\beta=0}\beta, \\ &= x^{'}(0) + \left.\frac{d}{d\beta}(-\gamma\beta t + \gamma x)\right|_{\beta=0}\beta, \\ &= x^{'}(0) - \beta t \end{aligned}$$

Por lo tanto, las transformaciones infinitesimales son

$$\begin{aligned} \delta t^{'} &= -\beta x, \\ \delta x^{'} &= -\beta t, \end{aligned}$$